

Livret de transition — Spécialité Mathématiques

Préparation à l'entrée en Terminale

Objectifs & Compétences du Livret

Ce document rassemble 49 exercices fondamentaux qu'un élève doit maîtriser avant d'entrer en Terminale spécialité mathématiques.

L'objectif est clair : consolider le socle de Première pour aborder sereinement les suites, les limites, la dérivation, l'exponentielle, les probabilités, la géométrie analytique et les premiers raisonnements de Terminale.

À maîtriser absolument

Les exercices sont classés en trois niveaux :

1. **Niveau 1 — Automatismes** : exercices à savoir faire rapidement, sans hésitation.
2. **Niveau 2 — Consolidation** : exercices qui demandent d'organiser une méthode.
3. **Niveau 3 — Approfondissement** : exercices plus ambitieux, destinés aux élèves qui veulent prendre de l'avance.

À maîtriser absolument

Les priorités absolues sont :

1. développer, factoriser et simplifier ;
2. résoudre équations et inéquations ;
3. dresser des tableaux de signes ;
4. dériver et exploiter le signe d'une dérivée ;
5. étudier les variations d'une fonction ;
6. maîtriser les suites arithmétiques, géométriques et récurrentes simples ;
7. connaître les propriétés de la fonction exponentielle ;
8. comprendre les bases des probabilités et de la géométrie analytique.

À maîtriser absolument

Chaque exercice contient un QR code. Il mène vers la page de correction correspondante sur utspe.com.

Contents

Fiches de cours de révision	4
Calcul algébrique	4
Équations, inéquations et second degré	5
Fonctions et dérivation	8
Fonction exponentielle	9
Suites numériques	10
Probabilités et variables aléatoires	10
Vecteurs, géométrie et trigonométrie	11
Test diagnostic rapide	12
1 Calcul algébrique indispensable	13
1.1 Développer et réduire	13
1.2 Factoriser	14
1.3 Simplifier des fractions rationnelles	15
2 Équations et inéquations	15
2.1 Équations du second degré	16
2.2 Équations polynomiales de degré supérieur	17
2.3 Inéquations du second degré	17
2.4 Inéquations rationnelles	18
3 Fonctions réelles	19
3.1 Généralités sur les fonctions	20
3.2 Parité et imparité	20
3.3 Forme canonique et variations	21
4 Dérivation	21
4.1 Dérivées usuelles	22
4.2 Dérivées de produits et de quotients	23
4.3 Étude complète de fonction	24
4.4 Tangente à une courbe	25
5 Fonction exponentielle	26
5.1 Propriétés algébriques	26
5.2 Équations avec exponentielle	26
5.3 Inéquations avec exponentielle	27
5.4 Dérivation avec exponentielle	28

5.5	Étude de fonction avec exponentielle	28
5.6	Signe d'expressions avec exponentielle	30
6	Suites numériques	30
6.1	Suites explicites et récurrentes	31
6.2	Suites arithmétiques	31
6.3	Suites géométriques	32
6.4	Limites de suites	33
6.5	Premiers raisonnements par récurrence	33
7	Probabilités	34
8	Vecteurs et géométrie analytique	35
9	Trigonométrie	37
10	Exercices de synthèse	38
10.1	Synthèse 1	38
10.2	Synthèse 2	39
10.3	Synthèse 3	39
10.4	Synthèse 4	39

Fiches de cours de révision

Objectifs & Compétences du Livret

Ces fiches reprennent les connaissances indispensables du livret. Avant de commencer les exercices, l'élève doit savoir reconnaître la méthode à utiliser, citer les formules essentielles et rédiger une conclusion claire.

1. Calcul algébrique

Propriété clé à retenir

Les identités remarquables et les règles de puissances doivent être connues sans hésitation :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0), \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Méthode de résolution

Choisir la bonne forme.

- On développe pour réduire, comparer deux expressions ou identifier des coefficients.
- On factorise pour résoudre une équation produit nul ou étudier un signe.
- On simplifie une fraction seulement après avoir précisé les valeurs interdites.

Exemple :

$$\frac{3x^4 \times 2x^3}{x^2} = 6x^{4+3-2} = 6x^5, \quad x \neq 0.$$

2. Équations, inéquations et second degré

Propriété clé à retenir

Une inéquation compare deux expressions à l'aide de $<$, \leq , $>$ ou \geq . La résoudre, c'est déterminer tous les réels x pour lesquels la comparaison est vraie.

Règles de transformation. On peut ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres sans changer le sens de l'inégalité :

$$A < B \iff A + c < B + c.$$

On peut multiplier ou diviser par un nombre strictement positif sans changer le sens :

$$A < B, \quad c > 0 \iff cA < cB.$$

En revanche, lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité s'inverse :

$$A < B, \quad c < 0 \iff cA > cB.$$

Il faut donc être particulièrement attentif lorsqu'on divise par une expression qui dépend de x : son signe n'est pas forcément connu.

Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation du premier degré :

1. développer et réduire si nécessaire ;
2. regrouper les termes en x d'un côté et les constantes de l'autre ;
3. isoler x en faisant attention au signe du coefficient par lequel on divise ;
4. écrire l'ensemble solution sous forme d'intervalle.

Exemple.

$$-2x + 5 \leq 11$$

$$-2x \leq 6$$

Comme on divise par $-2 < 0$, on inverse le sens :

$$x \geq -3.$$

Ainsi

$$S = [-3; +\infty[.$$

Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation qui n'est pas directement du premier degré, on évite de diviser par une expression contenant x . On ramène tout dans un seul membre, puis on étudie un signe :

$$A(x) \leq B(x) \iff A(x) - B(x) \leq 0.$$

Ensuite, on factorise si possible et on dresse un tableau de signes.

Pour une inéquation produit comme

$$(x - a)(x - b) \geq 0,$$

on cherche les zéros de chaque facteur, puis on combine les signes.

Pour une inéquation quotient comme

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0,$$

on cherche les zéros du numérateur et les valeurs interdites du dénominateur. Les valeurs qui annulent le dénominateur ne font jamais partie de l'ensemble solution.

Propriété clé à retenir

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, on calcule

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\Delta > 0 : \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\Delta = 0 : \quad x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad \Delta < 0 : \quad \text{aucune solution réelle.}$$

Pour le signe de $ax^2 + bx + c$, lorsque $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

Tableau de signe d'un trinôme du second degré.

Les tableaux ci-dessous sont donnés pour $a > 0$. Si $a < 0$, on inverse tous les signes.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	+	0	-	0	+

$$\Delta > 0, \quad x_1 < x_2.$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	+	0	+

$$\Delta = 0, \quad x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	+	

$$\Delta < 0.$$

Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation produit ou quotient :

1. tout ramener dans un seul membre ;
2. factoriser ;
3. repérer les zéros et les valeurs interdites ;
4. dresser un tableau de signes ;
5. conclure avec des intervalles.

Exemple de tableau de signes. Pour résoudre $(x - 2)(x - 3) \geq 0$, on place les zéros 2 et 3, puis on étudie le signe de chaque facteur :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	0	+
$(x - 2)(x - 3)$	+	0	-	+

On obtient donc

$$S =] - \infty; 2] \cup [3; +\infty[.$$

3. Fonctions et dérivation

Propriété clé à retenir

L'image de a par f est $f(a)$. Chercher les antécédents de b revient à résoudre $f(x) = b$.

Les dérivées usuelles et opérations essentielles sont :

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (uv)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Méthode de résolution

Pour étudier une fonction :

1. déterminer son domaine de définition ;
2. calculer la dérivée ;
3. factoriser la dérivée si possible ;
4. étudier le signe de f' ;
5. construire le tableau de variations.

Si $f'(x) > 0$, alors f est croissante ; si $f'(x) < 0$, alors f est décroissante.

4. Fonction exponentielle

Propriété clé à retenir

Pour tous réels a et b :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}, \quad (e^a)^b = e^{ab}, \quad e^x > 0.$$

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$e^A = e^B \iff A = B, \quad e^A < e^B \iff A < B.$$

Si $f(x) = e^{ax+b}$, alors

$$f'(x) = ae^{ax+b}.$$

Comme $e^{ax+b} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de a .

5. Suites numériques

Propriété clé à retenir

Une suite arithmétique vérifie $u_{n+1} = u_n + r$ et

$$u_n = u_0 + nr.$$

Une suite géométrique vérifie $u_{n+1} = qu_n$ et

$$u_n = u_0q^n.$$

Pour les sommes :

$$u_0 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} \quad \text{si la suite est arithmétique,}$$

$$u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si la suite est géométrique et } q \neq 1.$$

Méthode de résolution

Pour étudier les variations d'une suite, on étudie souvent le signe de $u_{n+1} - u_n$. Une suite arithmétique est croissante si $r > 0$ et décroissante si $r < 0$. Pour une suite géométrique positive, si $q > 1$ elle est croissante ; si $0 < q < 1$ elle est décroissante.

6. Probabilités et variables aléatoires

Propriété clé à retenir

Les formules de base sont :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Sur un arbre pondéré, on multiplie les probabilités le long d'une branche :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B),$$

puis on additionne les branches qui conduisent au même événement.

Propriété clé à retenir

Si X est une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, \dots, x_n , alors

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + \dots + x_nP(X = x_n).$$

La variance mesure la dispersion :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Plus $V(X)$ est grande, plus les résultats possibles sont dispersés autour de l'espérance.

7. Vecteurs, géométrie et trigonométrie

Propriété clé à retenir

Dans un repère orthonormé :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont colinéaires si et seulement si

$$xy' - yx' = 0.$$

Propriété clé à retenir

Les valeurs trigonométriques usuelles du premier quadrant sont :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Test diagnostic rapide

Objectifs & Compétences du Livret

Ce test permet d'identifier rapidement les points à retravailler. Il peut être fait en 30 à 40 minutes, sans calculatrice sauf mention contraire.

Exercice 1

Niveau 1 – Automatismes



Répondre aux questions suivantes.

- a) Développer : $(2x - 3)(x + 4)$.
- b) Factoriser : $x^2 - 25$.
- c) Résoudre : $3x - 7 = 2x + 5$.
- d) Résoudre : $(x - 2)(x + 3) = 0$.
- e) Résoudre : $(x - 1)(x + 4) > 0$.
- f) Calculer la dérivée de $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
- g) Calculer e^0 , puis simplifier $e^2 \times e^3$.
- h) Donner l'expression de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.
- i) Donner l'expression de la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 4.
- j) Dans un repère, calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} avec $A(1; 2)$ et $B(4; -3)$.

1. Calcul algébrique indispensable

Objectifs & Compétences du Livret

La maîtrise du calcul algébrique est fondamentale. Elle permet de simplifier des expressions, de résoudre des équations et d'étudier des fonctions efficacement.

1.1. Développer et réduire

Méthode de résolution

Pour développer, on utilise :

$$a(b + c) = ab + ac$$

et

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Exercice 2

Niveau 1 – Automatismes



Développer puis réduire :

a) $A = (2x - 3)(x + 5)$

b) $B = (x - 4)^2$

c) $C = (3x + 1)^2 - (x - 2)(x + 2)$

d) $D = 2(x - 1)(x + 3) - 3(x^2 - 4)$

e) $E = \left(\frac{x}{2} + 3\right)(x - 2)$

f) $F = (x + 2)(x - 3)(x + 1)$

Exercice 3

Niveau 2 – Consolidation



Développer puis réduire :

a) $A = (2x - 1)^3$

b) $B = (x + y)^2 - 2xy$

c) $C = \frac{1}{2}(4x - 6)(2x + 3)$

d) $D = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

1.2. Factoriser

Propriété clé à retenir

Les identités remarquables à connaître absolument sont :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Exercice 4

Niveau 1 – Automatismes



Factoriser :

a) $A = 6x^2 - 9x$

b) $B = x^2 - 16$

c) $C = 4x^2 + 12x + 9$

d) $D = (x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(x + 5)$

e) $E = 9x^2 - 25$

Exercice 5

Niveau 2 – Consolidation



Factoriser :

a) $F = x^3 - 8$

b) $G = (2x - 1)^2 - 9$

c) $H = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

d) $I = 16x^4 - 81$

e) $J = (x - 1)^2 - 4(x - 1)$

f) $K = x^3 - x^2 - x + 1$

g) $L = 4(x + 1)^2 - 9(x - 1)^2$

Correction modèle détaillée

Factorisons :

$$K = x^3 - x^2 - x + 1.$$

On regroupe :

$$K = x^2(x - 1) - 1(x - 1).$$

Donc :

$$K = (x - 1)(x^2 - 1).$$

Or :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Ainsi :

$$K = (x - 1)^2(x + 1).$$

1.3. Simplifier des fractions rationnelles

Exercice 6

Niveau 2 – Consolidation



Simplifier en précisant le domaine de définition :

a) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

b) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

c) $\frac{(x - 2)^2}{x^2 - 4x + 4}$

d) $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

e) $\frac{x^2 - 9}{3 - x}$

f) $\frac{x^3 + x^2}{x^2(x + 1)}$

g) $\frac{4x^2 - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$

h) $\frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

2. Équations et inéquations

2.1. Équations du second degré

Propriété clé à retenir

Pour résoudre une équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$, il y a une solution double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution réelle.

Exercice 7

Niveau 1 – Automatismes



Résoudre dans \mathbb{R} :

- a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
- b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
- c) $x^2 + 4x + 7 = 0$
- d) $-3x^2 + 6x + 9 = 0$
- e) $(x - 1)^2 = 5$
- f) $x^2 - 1 = 0$

Exercice 8

Niveau 2 – Consolidation



Résoudre dans \mathbb{R} :

- a) $5x^2 - 20x + 20 = 0$
- b) $x^2 + x + 1 = 0$
- c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$

$$d) (x + 2)^2 = (2x - 1)^2$$

2.2. Équations polynomiales de degré supérieur

Exercice 9

Niveau 2 – Consolidation



Résoudre en factorisant :

a) $x^3 - 4x = 0$

b) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

c) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

e) $x^4 - 1 = 0$

f) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

2.3. Inéquations du second degré

Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation du second degré :

1. factoriser ou utiliser le discriminant ;
2. dresser un tableau de signes ;
3. conclure selon l'inégalité demandée.

Exemple : signe de $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le trinôme est positif sur $] -\infty; 2[\cup] 3; +\infty[$ et négatif sur $] 2; 3[$.

Exercice 10*Niveau 1 – Automatismes*Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

b) $2x^2 - 8 \geq 0$

c) $-x^2 + 2x + 3 > 0$

d) $(x - 1)^2 \leq 4$

e) $x^2 + 6x + 9 \geq 0$

Exercice 11*Niveau 2 – Consolidation*Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $-2x^2 + 8x - 8 > 0$

b) $3x^2 - 12x + 9 \leq 0$

c) $x^2 - 1 < 0$

d) $(2x - 3)(x + 1) \geq 0$

e) $4x^2 - 9 \leq 0$

2.4. Inéquations rationnelles**Exercice 12***Niveau 2 – Consolidation*Résoudre dans \mathbb{R} en dressant un tableau de signes :

a) $\frac{x - 3}{x + 2} \geq 0$

b) $\frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 2} < 0$

c) $\frac{x^2 - 4}{x - 1} \leq 0$

d) $\frac{2x + 1}{x - 3} < 1$

$$e) \frac{x^2 - 9}{x - 2} > 0$$

$$f) \frac{1}{x} > 2$$

$$g) \frac{x - 1}{x + 2} \leq 0$$

$$h) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} < 0$$

$$i) \frac{3 - x}{x + 1} \geq 0$$

Correction modèle détaillée

Réolvons :

$$\frac{x - 3}{x + 2} \geq 0.$$

La fraction est définie pour :

$$x \neq -2.$$

Le numérateur s'annule pour :

$$x = 3.$$

On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x - 3$	-	0	-	+
$x + 2$	-	0	+	+
$\frac{x - 3}{x + 2}$	+	-	0	+

Donc :

$$S =] - \infty; -2[\cup [3; +\infty[.$$

3. Fonctions réelles

3.1. Généralités sur les fonctions

Exercice 13

Niveau 1 – Automatismes



Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$.
2. Résoudre $f(x) = 1$.
3. Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 14

Niveau 2 – Consolidation



Pour chaque fonction, déterminer le domaine de définition :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{x^2 - 1}$$

3.2. Parité et imparité

Propriété clé à retenir

Soit f une fonction définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que si $x \in D$, alors $-x \in D$).

- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. *Exemple* : $x \mapsto x^2$.
- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine. *Exemple* : $x \mapsto x^3$.

Une fonction n'est pas nécessairement paire ou impaire : la plupart ne sont ni l'une ni l'autre.

Méthode de résolution

Pour étudier la parité de f :

1. vérifier que le domaine est symétrique par rapport à 0 ;
2. calculer $f(-x)$ et le comparer à $f(x)$ et à $-f(x)$.

Exercice 15

Niveau 2 – Consolidation



Pour chaque fonction, déterminer si elle est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre :

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$g(x) = x^3 - 2x$$

$$h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$k(x) = |x| + 1.$$

3.3. Forme canonique et variations

Exercice 16

Niveau 1 – Automatismes



Soit :

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. Donner le sommet de la parabole.
3. Donner le tableau de variations.
4. Résoudre $f(x) \leq 0$.

4. Dérivation

Objectifs & Compétences du Livret

La dérivation est la clé pour étudier les variations des fonctions. C'est un outil incontournable en Terminale.

4.1. Dérivées usuelles

Propriété clé à retenir

Les dérivées de base à connaître absolument sont :

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{sur }]0; +\infty[$$

$$(e^x)' = e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 17

Niveau 1 – Automatismes



Dériver les fonctions suivantes sur leur domaine de dérivabilité :

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

d) $k(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$

e) $m(x) = \frac{3}{x^2}$

f) $n(x) = -2x^3 + 5x$

Exercice 18

Niveau 2 – Consolidation



Dériver les fonctions suivantes :

a) $p(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3$

b) $q(x) = 10 - x + x^2$

c) $r(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

4.2. Dérivées de produits et de quotients

Propriété clé à retenir

Pour deux fonctions dérivables u et v :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec $v(x) \neq 0$ sur l'intervalle étudié.

Exercice 19

Niveau 2 – Consolidation



Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$

b) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

c) $h(x) = \frac{3x - 1}{x + 4}$

d) $k(x) = (x^2 - 2x)(x + 3)$

e) $m(x) = \frac{x^3 - 2x}{x + 1}$

f) $n(x) = (1 - 2x)(x^2 + 4)$

g) $p(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$

h) $q(x) = x\sqrt{x}$

i) $r(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

j) $s(x) = (x^3 - 2)(x + 1)$

4.3. Étude complète de fonction

Méthode de résolution

Pour dresser le **tableau de variations** d'une fonction f :

1. calculer $f'(x)$ et le factoriser ;
2. étudier le signe de $f'(x)$ (tableau de signes) ;
3. en déduire les variations de f (croissante quand $f' > 0$, décroissante quand $f' < 0$).

Exemple : pour une fonction dont la dérivée s'annule en a et b ($a < b$) avec $f' > 0$, puis $f' < 0$, puis $f' > 0$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Exercice 20

Niveau 2 – Consolidation



Soit :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer les extremums locaux.
5. Résoudre $f(x) = 0$ graphiquement ou numériquement.

Correction modèle détaillée

On a :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$$

Donc :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

On factorise :

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1).$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $(x - 3)(x + 1)$.

Ainsi, f est croissante sur $] -\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 3]$, puis croissante sur $[3; +\infty[$.

On calcule :

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 1 = 6$$

et

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26.$$

Donc f admet un maximum local égal à 6 en $x = -1$ et un minimum local égal à -26 en $x = 3$.

On résume le signe de f' et les variations de f dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 6 ↘	-26	↗ $+\infty$	

4.4. Tangente à une courbe

Propriété clé à retenir

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exercice 21

Niveau 1 – Automatismes



Soit :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

1. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
3. Cette tangente coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, où ?

5. Fonction exponentielle

Objectifs & Compétences du Livret

La fonction exponentielle est l'un des grands piliers de la Terminale. Elle intervient dans les études de fonctions, les suites, les modèles de croissance et de décroissance.

5.1. Propriétés algébriques

Propriété clé à retenir

Pour tous réels a et b :

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 22

Niveau 1 – Automatismes



Simplifier :

$$e^0, \quad e^1, \quad e^2 \times e^3, \quad \frac{e^5}{e^2}, \quad (e^3)^2$$

$$e^{-2} \times e^5, \quad \frac{1}{e^{-3}}, \quad e^{2x+1} \times e^{1-2x}.$$

5.2. Équations avec exponentielle

Propriété clé à retenir

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . Par conséquent :

$$e^A = e^B \iff A = B.$$

Exercice 23

Niveau 1 – Automatismes

Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $e^x = 1$

b) $e^x = e^3$

c) $e^{2x-1} = e^5$

d) $e^{x^2-4} = 1$

e) $e^{x^2-3x} = e^4$

f) $e^{3x} = e^{1-x}$

5.3. Inéquations avec exponentielle**Propriété clé à retenir**

Puisque l'exponentielle est strictement croissante :

$$e^A \leq e^B \iff A \leq B.$$

Exercice 24

Niveau 1 – Automatismes

Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $e^x < e^2$

b) $e^{3x+1} \geq e^7$

c) $e^{-2x+5} < e$

d) $e^{x^2-1} \leq e^3$

e) $e^{x^2} \geq e$

f) $e^{1-x} \leq 1$

g) $e^{2x} - e^x > 0$

5.4. Dérivation avec exponentielle

Propriété clé à retenir

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$(e^x)' = e^x.$$

La fonction exponentielle est sa propre dérivée.

Exercice 25

Niveau 2 – Consolidation



Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x$

b) $g(x) = 3e^x - 2x + 1$

c) $h(x) = xe^x$

d) $k(x) = (x^2 + 1)e^x$

e) $m(x) = \frac{e^x}{x + 1}$

f) $n(x) = e^{2x}$

g) $p(x) = (x - 1)e^{-x}$

h) $q(x) = e^{x^2}$

i) $r(x) = (e^x - 1)(e^x + 1)$

j) $s(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

5.5. Étude de fonction avec exponentielle

Exercice 26

Niveau 2 – Consolidation



Soit :

$$f(x) = (x - 2)e^x.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.

4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Calculer le minimum de f .

Correction modèle détaillée

On a :

$$f(x) = (x - 2)e^x.$$

Avec :

$$u(x) = x - 2, \quad v(x) = e^x.$$

Alors :

$$u'(x) = 1, \quad v'(x) = e^x.$$

Donc :

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x - 2)e^x.$$

Ainsi :

$$f'(x) = (x - 1)e^x.$$

Or :

$$e^x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - 1$.

La fonction f est décroissante sur $] -\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Le minimum est atteint en $x = 1$:

$$f(1) = (1 - 2)e^1 = -e.$$

Le tableau de variations de f est alors :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	▣	▣ $-e$	▣

Méthode de résolution

Pour étudier le signe d'une expression contenant e^x , on utilise que $e^x > 0$ pour tout réel x .

Le signe de $(x - 1)e^x$ est simplement celui de $x - 1$.

5.6. Signe d'expressions avec exponentielle

Exercice 27

Niveau 2 – Consolidation



Étudier le signe des expressions suivantes :

a) $f(x) = e^x - 1$

b) $g(x) = e^x - e^2$

c) $h(x) = e^{2x} - e^x$

d) $k(x) = (x + 1)e^{-x}$

e) $m(x) = xe^{-x}$

f) $n(x) = (x - 1)(e^x - 1)$

g) $p(x) = (2 - x)e^x$

h) $q(x) = e^{2x} - 2e^x$

i) $r(x) = (x^2 - 1)e^x$

À maîtriser absolument

Les propriétés fondamentales de l'exponentielle à retenir :

$$e^0 = 1, \quad e^x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)' = e^x$$

$$e^A = e^B \iff A = B, \quad e^A \leq e^B \iff A \leq B.$$

6. Suites numériques

Objectifs & Compétences du Livret

Les suites sont fondamentales en Terminale. On y étudie leur comportement, leurs limites et le raisonnement par récurrence.

6.1. Suites explicites et récurrentes

Exercice 28

Niveau 1 – Automatismes



Soit :

$$u_n = 3n^2 - 2n + 1 \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Calculer :

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_{10}.$$

La suite est-elle croissante ?

Exercice 29

Niveau 1 – Automatismes



Soit la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = 3u_n - 1.$$

Calculer :

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4.$$

Conjecturer le comportement de la suite.

6.2. Suites arithmétiques

Propriété clé à retenir

Une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r vérifie :

$$u_n = u_0 + nr$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n + 1)}{2}.$$

Exercice 30

Niveau 1 – Automatismes



Soit (u_n) une suite arithmétique avec :

$$u_0 = 5, \quad r = 3.$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
2. Calculer u_{20} .
3. Calculer $S_{20} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 31

Niveau 2 – Consolidation



Une suite arithmétique vérifie :

$$u_2 = 7, \quad u_5 = 16.$$

Trouver u_0 et r .**6.3. Suites géométriques****Propriété clé à retenir**Une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q vérifie :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1.$$

Exercice 32

Niveau 1 – Automatismes

Soit (v_n) une suite géométrique avec :

$$v_0 = 4, \quad q = 2.$$

1. Donner l'expression de v_n en fonction de n .
2. Calculer v_{10} .
3. Calculer $S_{10} = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.

Exercice 33

Niveau 2 – Consolidation



Une suite géométrique vérifie :

$$v_1 = 6, \quad v_3 = 24.$$

Trouver v_0 et q .

6.4. Limites de suites

Exercice 34

Niveau 2 – Consolidation



Déterminer la limite de chaque suite :

a) $u_n = \frac{n+1}{n}$

b) $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$

c) $u_n = \frac{1}{n}$

d) $u_n = 0,9^n$

e) $u_n = 2 \times 1,1^n$

f) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

g) $u_n = \frac{n^3}{n^2 + 1}$

h) $u_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + n - 1}$

i) $u_n = \sqrt{n}$

j) $u_n = (-2)^n$

k) $u_n = \frac{1}{n^2} + n$

l) $u_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$

6.5. Premiers raisonnements par récurrence

Exercice 35

Niveau 3 – Approfondissement



Soit la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Montrer par récurrence que :

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

pour tout entier naturel n .

7. Probabilités

Objectifs & Compétences du Livret

Les probabilités permettent de modéliser l'aléatoire et de prendre des décisions fondées sur des données.

Propriété clé à retenir

Probabilité conditionnelle. Soient A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B se note $P_B(A)$ et vaut :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On en déduit la formule des probabilités composées :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

Exercice 36

Niveau 1 – Automatismes



Dans une classe, 60 % des élèves font anglais, 40 % font espagnol, et 20 % font les deux. On choisit un élève au hasard. Calculer :

1. la probabilité qu'il fasse anglais ou espagnol ;
2. la probabilité qu'il fasse espagnol sachant qu'il fait anglais ;
3. dire si les événements sont indépendants.

Exercice 37

Niveau 2 – Consolidation



Une maladie touche 2 % d'une population. Un test est positif dans 95 % des cas si la personne est malade, et positif dans 4 % des cas si elle n'est pas malade.

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité d'avoir un test positif.
3. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

Correction modèle détaillée

Notons M l'événement « être malade » et T l'événement « test positif ».

On a :

$$P(M) = 0,02, \quad P(\overline{M}) = 0,98$$

$$P_M(T) = 0,95, \quad P_{\overline{M}}(T) = 0,04.$$

Alors :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T).$$

Donc :

$$P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,04.$$

Ainsi :

$$P(T) = 0,019 + 0,0392 = 0,0582.$$

La probabilité d'être malade sachant que le test est positif vaut :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,0582} \approx 0,326.$$

Donc la probabilité cherchée est environ :

$$32,6\%.$$

8. Vecteurs et géométrie analytique

Exercice 38

Niveau 1 – Automatismes



Dans un repère, on donne :

$$A(2;3), \quad B(5;-1), \quad C(-2;4).$$

1. Calculer \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Calculer la longueur AB .
3. Déterminer le milieu de $[BC]$.

Exercice 39

Niveau 1 – Automatismes



On donne :

$$A(1;2), \quad B(4;8), \quad C(-2;-4).$$

1. Calculer \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

2. Les points sont-ils alignés ?

Propriété clé à retenir

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$xy' - x'y = 0.$$

Exercice 40

Niveau 2 – Consolidation



Soient :

$$A(0;0), \quad B(3;0), \quad C(3;4).$$

1. Calculer les longueurs AB , BC et CA .
2. Vérifier que le triangle ABC est rectangle.
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 41

Niveau 2 – Consolidation



Déterminer si les vecteurs sont colinéaires :

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
3. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
4. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 42

Niveau 2 – Consolidation



Soit $ABCD$ un parallélogramme avec :

$$A(0;0), \quad B(3;0), \quad D(1;2).$$

1. Déterminer les coordonnées de C .
2. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD .
3. Déterminer le centre du parallélogramme.

9. Trigonométrie

Exercice 43

Niveau 1 – Automatismes



Compléter les valeurs exactes :

a) $\cos 0$, $\sin 0$

b) $\cos \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{6}$

c) $\cos \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{4}$

d) $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$

e) $\cos \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2}$

f) $\cos \pi$, $\sin \pi$

Exercice 44

Niveau 2 – Consolidation



Résoudre dans $[0; 2\pi]$:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = -1$

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\sin x = \frac{1}{2}$

f) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos x = 0$

h) $\sin x = -1$

Exercice 45

Niveau 3 – Approfondissement



Résoudre dans \mathbb{R} :

1. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\tan x = 1$

4. $\cos(3x) = -1$

10. Exercices de synthèse

10.1. Synthèse 1

Exercice 46

Niveau 2 – Consolidation



Soit :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.
6. Résoudre $f(x) = 1$.

10.2. Synthèse 2

Exercice 47

Niveau 2 – Consolidation



Soit :

$$g(x) = (2x - 1)e^x.$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Résoudre $g'(x) = 0$.
3. Étudier le signe de $g'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations.
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe de g en $x = 0$.

10.3. Synthèse 3

Exercice 48

Niveau 2 – Consolidation



Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Montrer que la suite $(u_n + 1)$ est géométrique.
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de (u_n) .

10.4. Synthèse 4

Exercice 49

Niveau 3 – Approfondissement



Soit :

$$h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

définie sur :

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

1. Simplifier $h(x)$ sur le domaine adéquat.

2. Calculer $h'(x)$.
3. Étudier le signe de $h'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de h .

À maîtriser absolument

Cet ensemble d'exercices est une préparation essentielle pour la Terminale spécialité mathématiques.

Conseil : travailler d'abord tous les exercices de Niveau 1, puis reprendre les erreurs. Ensuite seulement, passer au Niveau 2. Les exercices de Niveau 3 sont faits pour préparer l'exigence de la Terminale, mais ils ne doivent pas bloquer la consolidation du socle.

Le cap est simple : automatismes solides, méthodes propres, rédaction claire.