J'entre en Terminale – Correction exercice 35

Premiers raisonnements par récurrence Niveau 3 - Approfondissement

Énoncé

Soit la suite définie par :
$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$
Montrer par récurrence que :
$u_n = 2^{n+1} - 1$
pour tout entier naturel n.

Correction détaillée

Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité. Supposons que $u_n = 2^{n+1} - 1$. Alors :
$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 1.$
La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.