

Chapitre 2

Vecteurs 1 – Translation et égalité de vecteurs

Objectifs du chapitre

Domaine : Géométrie.

Translation, vecteurs, égalité de vecteurs, parallélogramme, relation de Chasles.

Organisation : programme officiel, cours, méthodes, exemples guidés, exercices corrigés et fiche de synthèse.

Programme officiel (BO)

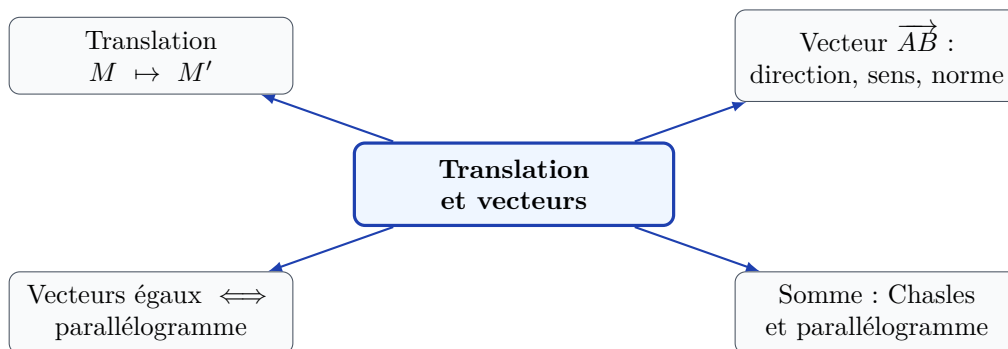
Capacités et contenus exigibles

- Représenter un vecteur par une flèche et connaître son sens, sa direction et sa norme.
- Utiliser la relation de Chasles.
- Additionner des vecteurs géométriquement (règle du parallélogramme et méthode de la chaîne).
- Utiliser les vecteurs pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

La multiplication d'un vecteur par un réel et la colinéarité sont étudiées dans les chapitres « Vecteurs 2 » et « Colinéarité, déterminant et droites ».

2.1 Carte mentale du chapitre

Carte mentale



2.2 Introduction

Les vecteurs sont des objets mathématiques qui modélisent les **déplacements**. Ce premier chapitre introduit les vecteurs à travers la notion de **translation**, sans faire appel aux coordonnées. L'objectif est de construire une intuition géométrique solide avant d'aborder le calcul vectoriel dans un repère.

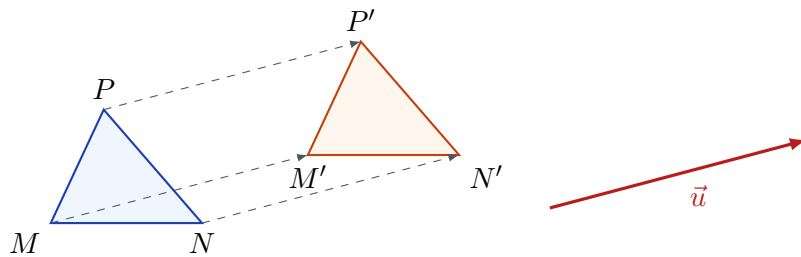
2.3 Cours

2.3.1 A – Translation

Définition – Translation

Une **translation** est un déplacement qui fait glisser toute figure dans la même direction, le même sens et sur la même distance, sans rotation ni déformation.

Plus précisément, soient A et B deux points. La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati). Le point M' est l'**image** de M par cette translation.



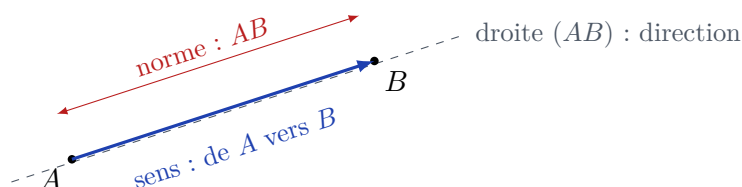
Le triangle $M'N'P'$ est l'image du triangle MNP : chaque point a glissé de la même façon.

Définition – Vecteur $\overrightarrow{AB}$

La translation qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** .

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ décrit le déplacement du point A vers le point B . Lorsque $A \neq B$, il est caractérisé par :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **norme** : la longueur AB , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.



Définition – Vecteur nul

Pour tout point A , le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. Il correspond à l'absence de déplacement.

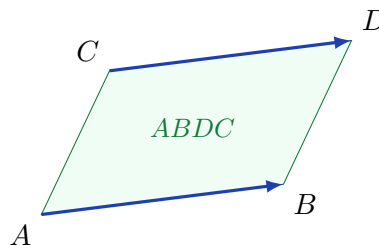
Attention

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ lorsque $A \neq B$: ces deux vecteurs ont la même direction et la même norme, mais des sens contraires. On dit que $\overrightarrow{BA}$ est l'**opposé** de $\overrightarrow{AB}$ et on écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

2.3.2 B – Égalité de vecteurs**Définition – Vecteurs égaux**

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D , c'est-à-dire que $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: attention à l'ordre des sommets, le parallélogramme est $ABDC$.

Propriété – Parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Attention

Pour le parallélogramme $ABCD$, c'est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (et non $\overrightarrow{CD}$) : on parcourt les deux côtés opposés **dans le même sens**. L'ordre des sommets compte.

Méthode – Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

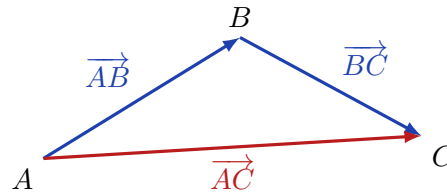
Pour montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, on montre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou, de façon équivalente, que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

2.3.3 C – Somme de vecteurs et relation de Chasles**Propriété – Relation de Chasles**

Pour tous points A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Enchaîner la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à faire la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



Méthode – Simplifier avec Chasles (méthode de la chaîne)

On enchaîne les points : l'extrémité d'un vecteur doit être l'origine du suivant. Par exemple,

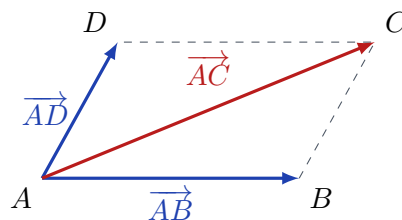
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Si les vecteurs ne s'enchaînent pas, on change d'abord leur ordre : l'addition des vecteurs est commutative.

Propriété – Règle du parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$



Justification : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2.4 Exemples guidés

Exemple 1 – Construire l'image d'un point

Énoncé. On donne trois points A, B, M non alignés. Construire l'image M' de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Solution. Par définition, M' est le point tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme. On trace la parallèle à (AB) passant par M , puis on reporte la longueur AB dans le sens de A vers B : on obtient M' .

Exemple 2 – Simplifier une somme

Énoncé. Simplifier $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

Solution. On réordonne pour enchaîner les points :

$$\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}.$$

Exemple 3 – Utiliser une translation pour obtenir un parallélogramme

Énoncé. ABC est un triangle. On note D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature de $ABDC$?

Solution. Par définition de D , on a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. D'après la définition de l'égalité de vecteurs, $ABDC$ est un parallélogramme ; il n'est pas aplati car A, B, C ne sont pas alignés.

2.5 Exercices progressifs

Exercice

Exercice 1 – Relation de Chasles. Simplifier :

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \text{b) } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} \quad \text{c) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Corrigé rédigé

- a) Les points s'enchaînent (B) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 b) De même : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Exercice

Exercice 2 – Parallélogramme. Dans le parallélogramme $ABCD$, compléter : $\overrightarrow{AB} = \dots$ et $\overrightarrow{AD} = \dots$.

Corrigé rédigé

$ABCD$ est un parallélogramme : les côtés opposés $[AB]$ et $[DC]$, parcourus dans le même sens, donnent $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. De même, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Exercice

Exercice 3 – Vrai ou faux. Justifier chaque réponse.

- a) Si deux vecteurs ont la même norme, alors ils sont égaux.
 b) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.
 c) Dans un parallélogramme $ABCD$, on a toujours $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Corrigé rédigé

- a) **Faux.** Il faut aussi la même direction et le même sens : par exemple, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même norme mais ne sont pas égaux (si $A \neq B$).
 b) **Vrai.** Deux vecteurs égaux ont la même norme, donc $AB = CD$.
 c) **Faux.** Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice

Exercice 4 – Réordonner avant de simplifier. Simplifier :

$$\text{a) } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \quad \text{b) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AB} \quad \text{c) } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{NQ}.$$

Corrigé rédigé

- a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
 b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$.
 c) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{PQ}$.

Exercice

Exercice 5 – Translation et règle du parallélogramme. ABC est un triangle. On note D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

- Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.
- En déduire que les points D et E sont confondus.

Corrigé rédigé

- D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: $ABDC$ est un parallélogramme (non aplati, car A, B, C ne sont pas alignés).
- Dans le parallélogramme $ABDC$, la règle du parallélogramme donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$: les points E et D sont confondus.

2.6 Fiche de synthèse

Fiche de synthèse

Notion	À retenir
Vecteur $\overrightarrow{AB}$	Défini par une direction (droite (AB)), un sens (de A vers B) et une norme (AB) .
Vecteur nul et opposé	$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$; $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	L'image M' de M vérifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$: $ABM'M$ est un parallélogramme.
Vecteurs égaux	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Parallélogramme $ABCD$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Relation de Chasles	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Règle du parallélogramme	Si $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.