Chapitre 14

Loi des grands nombres

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Représenter une variable aléatoire comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Espérance et variance de la loi binomiale.

Exemples dálgorithme — Programme officiel (BO)

- Calculer la probabilité de $(|S_n - pn| > \sqrt{n})$ où $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$; comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Simulation d'une marche aléatoire.
- Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ ; calculer l'écart type s des moyennes observées et le comparer à $\sigma/\sqrt{n}$.

Définition 1

Soit X une variable aléatoire. La variable $Y = aX + b$ prend les valeurs $y_i = ax_i + b$.

Propriété 1

Pour $Y = aX + b$:
- $E(Y) = aE(X) + b$
- $V(Y) = a^2V(X)$
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

1) Somme de deux variables aléatoires

Propriété 2

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers. La variable aléatoire $S = X + Y$ associe à chaque issue la somme des deux valeurs obtenues :

$$S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

Son espérance vérifie toujours la relation de linéarité :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors les variances s'additionnent :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Plus généralement, pour des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$,

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{et} \quad V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Cette écriture est très utile pour modéliser une répétition d'expériences : on représente alors la variable étudiée comme une somme de variables plus simples.

A) Inégalités

1) Inégalité de Markov

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

2) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire et $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

B) Inégalité de concentration

Définition 2

*Un **échantillon de taille** n de la loi de X est une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.*

Théorème 1

Soit $M_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Pour tout $a > 0$:

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}.$$

Propriété 5 (*Loi des grands nombres*)

Pour tout $a > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0.$$

La moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance.