Chapitre 13

Calcul intégral

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Pour une fonction f positive croissante sur $[a;b]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f ; pour toute primitive F de f, relation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.

Exemples dálgorithme — Programme officiel (BO)

- Méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo.
- Algorithme de Brouncker pour le calcul de $\ln 2$.

A) Intégrale et primitive

1) Intégrale d'une fonction positive

Définition 1

*Soit f continue et positive sur $[a;b]$. L'**intégrale** de a à b de f est l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 1 (*Existence d'une primitive*)

Soit f continue et positive sur $[a;b]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$. C'est la primitive de f qui s'annule en a.

Propriété 1

Si f est continue et négative sur $[a;b]$, l'aire du domaine est $\displaystyle\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriété 2

Si F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b.$$

2) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Propriété 3

Soient f et g continues sur I, et $a, b, c \in I$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

— $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

— $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

— ***Relation de Chasles :*** $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

— ***Linéarité :*** $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

3) Signe de l'intégrale

Propriété 4

Pour $a \leq b$ et f continue sur $[a;b]$:

1. *Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.*
2. *Si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$.*
3. *Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g\,\mathrm{d}x$.*

4) Intégration par parties

Théorème 2

Si u et v sont dérivables sur $[a;b]$ avec u' et v' continues :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

B) Applications du calcul intégral

1) Aire entre deux courbes

Propriété 5

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$, l'aire du domaine compris entre les courbes de f et de g est :

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

2) Valeur moyenne d'une fonction

Propriété 6

*La **valeur moyenne** de f continue sur $[a;b]$ est :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Graphiquement, $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$: l'aire du rectangle de hauteur μ égale l'aire sous la courbe.