Chapitre 12 – Fonctions cosinus et sinus

Spé Maths Terminale

Capacités attendues

— Utiliser la parité et la périodicité de sinus et cosinus.
— Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques simples.
— Dériver et primitiver des fonctions trigonométriques composées.

1 Définition et propriétés

Définition 1

On se place dans un repère orthonormé et on considère le cercle trigonométrique. Soient x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x.
— $\sin(x)$ *est l'ordonnée du point* M.
— $\cos(x)$ *est l'abscisse du point* M.

Propriété 1

Pour tout réel x :

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1, \qquad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Propriété 2

— *La fonction cosinus est paire :* $\cos(-x) = \cos(x)$.
— *La fonction sinus est impaire :* $\sin(-x) = -\sin(x)$.
— *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques :*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

2 Équations et inéquations trigonométriques

Propriété 3

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
— $\cos(x) = \cos(a) \iff x = a + 2k\pi$ *ou* $x = -a + 2k\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$;
— $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - a + 2k\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1

Pour résoudre une équation ou une inéquation sur un intervalle donné, on commence par placer les solutions sur le cercle trigonométrique, puis on ne conserve que celles qui appartiennent à l'intervalle demandé.

Exemple 1

Résoudre $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ *sur* $[0; 2\pi]$.

Sur le cercle trigonométrique, $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ *pour* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{5\pi}{6}$. *Donc :*

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Exemple 2

Résoudre $\cos(x) \leqslant 0$ *sur* $[0; 2\pi]$.

Le cosinus est négatif ou nul sur la partie gauche du cercle trigonométrique, donc :

$$S = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

3 Dérivées

Propriété 4

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ *et, pour tout réel* x *:*

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\sin x)' = \cos x.$$

Propriété 5

Soit u *une fonction dérivable sur un intervalle* I. *Les fonctions définies sur* I *par*

$$f(x) = \cos(u(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin(u(x))$$

sont dérivables sur I *et, pour tout* $x \in I$ *:*

$$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x)), \qquad g'(x) = u'(x)\cos(u(x)).$$

Exemple 3

Si $f(x) = \sin(3x^2 - 1)$, *alors* $u(x) = 3x^2 - 1$ *et* $u'(x) = 6x$. *Donc :*

$$f'(x) = 6x\cos(3x^2 - 1).$$

4 Primitives

Propriété 6

Soit u *une fonction dérivable sur un intervalle* I.

— $u'(x)\sin(u(x))$ *a pour primitive* $-\cos(u(x))$ *sur* I.

— $u'(x)\cos(u(x))$ *a pour primitive* $\sin(u(x))$ *sur* I.

Exemple 4

Une primitive de $f(x) = 2\cos(2x + 1)$ *est* $F(x) = \sin(2x + 1)$.

5 Variations

Propriété 7

La fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$, *de* 1 *à* -1.

x	0		π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

Propriété 8

La fonction sinus est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *puis décroissante sur* $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0