

Chapitre 12 – Fonctions cosinus et sinus

Spé Maths Terminale

Capacités attendues

- Utiliser la parité et la périodicité de sinus et cosinus.
- Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques simples.
- Dériver et primitiver des fonctions trigonométriques composées.

1 Définition et propriétés

Définition 1

On se place dans un repère orthonormé et on considère le cercle trigonométrique. Soient x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x .

- $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M .
- $\cos(x)$ est l'abscisse du point M .

Propriété 1

Pour tout réel x :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Propriété 2

- La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction sinus est impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

2 Équations et inéquations trigonométriques

Propriété 3

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1

Pour résoudre une équation ou une inéquation sur un intervalle donné, on commence par placer les solutions sur le cercle trigonométrique, puis on ne conserve que celles qui appartiennent à l'intervalle demandé.

Exemple 1

Résoudre $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.

Sur le cercle trigonométrique, $\sin(x) = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$. Donc :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Exemple 2

Résoudre $\cos(x) \leq 0$ sur $[0; 2\pi]$.

Le cosinus est négatif ou nul sur la partie gauche du cercle trigonométrique, donc :

$$S = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

3 Dérivées

Propriété 4

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Propriété 5

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Les fonctions définies sur I par

$$f(x) = \cos(u(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(u(x))$$

sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = -u'(x) \sin(u(x)), \quad g'(x) = u'(x) \cos(u(x)).$$

Exemple 3

Si $f(x) = \sin(3x^2 - 1)$, alors $u(x) = 3x^2 - 1$ et $u'(x) = 6x$. Donc :

$$f'(x) = 6x \cos(3x^2 - 1).$$

4 Primitives

Propriété 6

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

- $u'(x) \sin(u(x))$ a pour primitive $-\cos(u(x))$ sur I .
- $u'(x) \cos(u(x))$ a pour primitive $\sin(u(x))$ sur I .

Exemple 4

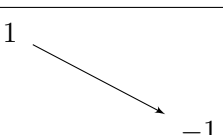
Une primitive de $f(x) = 2 \cos(2x + 1)$ est $F(x) = \sin(2x + 1)$.

5 Variations

Propriété 7

La fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$, de 1 à -1 .

x	0	π
$\cos(x)$	1	-1



Propriété 8

La fonction sinus est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0

The diagram illustrates the behavior of the sine function. It shows a table with two rows. The first row is labeled 'x' and contains the values 0, π/2, and π. The second row is labeled 'sin(x)' and contains the values 0, 1, and 0. Arrows point from the value 0 in the first column to the value 1 in the second column, and from the value 1 in the second column to the value 0 in the third column, indicating that the function increases from 0 to π/2 and then decreases from π/2 to π.