

# Chapitre 10

## Primitives et équations différentielles

### Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme  $(v' \circ u) \times u'$ .
- Pour une équation différentielle  $y' = ay + b$  ( $a \neq 0$ ) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle  $y' = ay + f$  : à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

### Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a$  est un nombre réel.

### Exemples d'algorithme — Programme officiel (BO)

- Résolution par la méthode d'Euler de  $y' = f$ , de  $y' = ay + b$ .

### Définition 1

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue  $y$  et ses dérivées successives.
- Une **solution** est toute fonction dérivable vérifiant cette égalité.

### Définition 2

$F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ .

### 1) Primitives de fonctions usuelles

Fonction $f$	Domaine	Primitive $F$
$f(x) = a$	$\mathbf{R}$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x^n, n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$	$\mathbf{R}$ si $n \in \mathbf{N}$ ; $\mathbf{R}^*$ sinon	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = e^x$	$\mathbf{R}$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ ou $] -\infty; 0[$	$F(x) = \ln  x  + c$

### Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

### Propriété 1

Deux primitives d'une même fonction continue sur  $I$  diffèrent d'une constante.

## Propriété 2

Pour tout  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}$ , il existe une unique solution  $F$  de  $y' = f$  sur  $I$  vérifiant  $F(x_0) = y_0$ .

## Propriété 3

Si  $F$  est une primitive de  $f$  et  $G$  de  $g$  sur  $I$ , et  $\lambda \in \mathbf{R}$  :

- $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
- $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$  sur  $I$ .

## A) Primitives de fonctions composées

Forme de $f$	Primitive constante) (sans	Conditions
$f' + g'$	$f + g$	$f, g$ dérivables
$\lambda f'$	$\lambda f$	$f$ dérivable
$f' f^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$	$f$ dérivable
$\frac{f'}{f^2}$	$-\frac{1}{f}$	$f$ dérivable, $f \neq 0$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	$f$ dérivable, $f > 0$
$\frac{f'}{f}$	$\ln f $	$f$ dérivable, $f \neq 0$
$f' e^f$	$e^f$	$f$ dérivable
$f' \times (g' \circ f)$	$g \circ f$	

## B) Équation différentielle $y' = ay$

### Propriété 4

Les solutions de  $y' = ay$  ( $a \neq 0$ ) sont les fonctions  $x \mapsto ke^{ax}$ ,  $k \in \mathbf{R}$ . Pour tout  $(x_0, y_0)$ , il existe une unique solution vérifiant  $y(x_0) = y_0$ .

*Démonstration.*  $f_k(x) = ke^{ax}$  vérifie  $f'_k(x) = kae^{ax} = af_k(x)$ , donc  $f_k$  est solution.

Réciproquement, si  $y$  est solution, posons  $g(x) = y(x)e^{-ax}$ . Alors  $g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$ , donc  $g$  est constante :  $g(x) = k$ , soit  $y(x) = ke^{ax}$ .  $\square$

## C) Équation différentielle $y' = ay + b$

### Propriété 5

Les solutions de  $y' = ay + b$  ( $a, b \neq 0$ ) sont les fonctions  $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ,  $k \in \mathbf{R}$ .

*Démonstration.* La solution constante particulière vérifie  $0 = ak + b$ , soit  $k = -\frac{b}{a}$ . Si  $g$  est une solution quelconque et  $f(x) = -\frac{b}{a}$ , alors  $h = g - f$  vérifie  $h' = ah$ , donc  $h(x) = ke^{ax}$ , d'où  $g(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ .  $\square$

## D) Équation différentielle $y' = ay + \varphi$

### Propriété 6

Si  $g$  est une solution particulière de  $y' = ay + \varphi$ , les solutions générales sont  $x \mapsto ke^{ax} + g(x)$ ,  $k \in \mathbf{R}$ .