Chapitre 9

Fonction logarithme népérien

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

— Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
— Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

— Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
— Limite en 0 de $x \mapsto x \ln x$.

Exemples dálgorithme — Programme officiel (BO)

— Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

Définition 1

La ***fonction logarithme népérien****, notée* $\ln$*, est définie sur* $]0;+\infty[$ *et associe à tout* $x > 0$ *l'unique solution* y *de l'équation* $e^y = x$*.*

Propriété 1

Les courbes des fonctions exponentielle et $\ln$ *sont symétriques par rapport à la droite* $y = x$*.*

A) Propriétés algébriques

Propriété 2

Pour tout $a > 0$, $b > 0$ *et* $x \in \mathbf{R}$ *:*

1. $\ln(e^x) = x$
2. $e^{\ln x} = x$
3. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
4. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
5. $\ln(a^n) = n \ln a$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$
6. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$
7. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$

Remarque 1

Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$ *et* $\ln e = 1$*.*

B) Équations avec logarithme et exponentielle

1) Équation de la forme $\ln(X) = a$

La solution unique est $X = e^a$.

2) Équation de la forme $e^X = a$

1. Si $a \leq 0$, il n'y a pas de solution.
2. Si $a > 0$, la solution est $X = \ln a$.

C) Étude de la fonction logarithme

1) Continuité et limites

Propriété 3

La fonction $\ln$ *est continue sur* $]0; +\infty[$.

Propriété 4

Limites aux bornes : $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Croissances comparées : *pour tout entier* $k \geq 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^k \ln x = 0.$$

2) Dérivée de la fonction logarithme

Propriété 5

La fonction $\ln$ *est dérivable sur* $]0; +\infty[$ *avec* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Si u *est dérivable sur* I *et* $u(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.