

Chapitre 8

Loi binomiale

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques ; représenter la situation par un arbre ; calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Calculer numériquement $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(k \leq X \leq k')$; chercher un intervalle I tel que $P(X \in I) < \alpha$ ou $P(X \in I) > 1 - \alpha$.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Exemples d'algorithme — Programme officiel (BO)

- Simulation de la planche de Galton.
- Problème de la surréservation : détermination du plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq \alpha$, pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ et $\alpha > 0$.
- Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.

A) Dénombrement

1) Principe additif

Définition 1

Deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 2

Un ensemble E à n éléments est dit **fini** de **cardinal** n , noté $\text{Card}(E) = n$.

Propriété 1

Si A_1, \dots, A_p sont des ensembles deux à deux disjoints :

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_p).$$

2) Principe multiplicatif

Définition 3

Un **p -uplet** de $E_1 \times \dots \times E_p$ est une liste ordonnée $(x_1; \dots; x_p)$ avec $x_i \in E_i$. Un 2-uplet est un couple, un 3-uplet un triplet.

Propriété 2

$$\text{Card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \cdots \times \text{Card}(E_p).$$

B) Arrangements et permutations

Définition 4

On appelle **factorielle** de n : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$. Par convention $0! = 1$.

Définition 5

Un **arrangement** de k éléments d'un ensemble A à n éléments est un k -uplet d'éléments distincts de A .

Propriété 3

Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Définition 6

Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n -uplet d'éléments distincts de E .

Propriété 4

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

C) Combinaisons

Propriété 5

Le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments est 2^n .

Démonstration. Chaque élément peut être inclus (1) ou exclu (0) d'une partie donnée. Il y a donc 2^n choix, correspondant aux 2^n suites binaires de longueur n . \square

1) Nombre de combinaisons

Définition 7

Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments. Le nombre de telles combinaisons est noté $\binom{n}{k}$.

Propriété 6

Pour $k \leq n$:

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. **Relation de Pascal** : si $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

3. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

D) Successions d'épreuves indépendantes

Définition 8

L'univers d'une succession de n épreuves indépendantes d'univers $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ est $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.

Propriété 7

La probabilité d'une issue $(x_1; \dots; x_n)$ est $p(x_1) \times \dots \times p(x_n)$.

E) Loi et schéma de Bernoulli

Définition 9

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience à deux issues : succès S et échec \bar{S} .

Définition 10

La **loi de Bernoulli** de paramètre p est la loi de la variable X :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Propriété 8

Pour $X \sim \mathcal{B}(p)$: $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Définition 11

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 12

La variable X comptant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$.

Propriété 9

Pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ et $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Démonstration. Un chemin réalisant k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité $p^k (1 - p)^{n-k}$. Le nombre de tels chemins est $\binom{n}{k}$ (nombre de façons de placer k succès parmi n épreuves). Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. \square

Propriété 10

Pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$: $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.