Chapitre 7

Orthogonalité, équations et distances dans l'espace

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples.
- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite ; reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point ; reconnaître un plan donné par une équation cartésienne.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
- Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A.

A) Produit scalaire dans l'espace

Définition 1

*Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace. Les points A, B, C déterminent un plan $\mathcal{P}$. Le **produit scalaire** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans ce plan.*

Propriété 1

Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls.

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
2. *Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.*

Définition 2

*Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.*

1) Opérations avec le produit scalaire

Propriété 2

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
5. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
7. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

B) Produit scalaire dans un repère

Définition 3

*Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormée** si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** si sa base l'est.*

Propriété 3

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

C) Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de deux droites

Définition 4

*Deux droites sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.*

Propriété 4

(d_1) de vecteur directeur $\vec{u}$ et (d_2) de vecteur directeur $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 5

*Une droite est **orthogonale** à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.*

Propriété 5

(d) de vecteur directeur $\vec{w}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ dirigé par $(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

3) Équation cartésienne d'un plan

Définition 6

*Un **vecteur normal** au plan $\mathcal{P}$ est tout vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.*

Propriété 6

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriété 7

Dans un repère orthonormé, le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ *de vecteur normal* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *a pour équation cartésienne :*

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec} \quad d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

D) Projection orthogonale et distances

Définition 7

Le ***projeté orthogonal*** *d'un point* A *sur une droite (ou un plan) est le pied de la perpendiculaire menée de* A *à cette droite (ou ce plan).*

Définition 8

La ***distance*** *d'un point* A *à un plan* $\mathcal{P}$ *est la plus petite longueur* AM *pour* $M \in \mathcal{P}$.

Propriété 8

Si H *est le projeté orthogonal de* A *sur* $\mathcal{P}$ *et* B *un point de* $\mathcal{P}$*, alors* $d(A, \mathcal{P}) = AH$ *et :*

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

Propriété 9

Si H *est le projeté orthogonal de* A *sur la droite* (d) *de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}$ *et* B *un point de* (d)*, alors* $d(A, d) = AH$ *et :*

$$AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} \right\|.$$