

Chapitre 6

Continuité

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples d'algorithme — Programme officiel (BO)

- Méthode de dichotomie.
- Méthode de Newton, méthode de la sécante.

A) Fonctions continues sur un intervalle

Définition 1

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- f est **continue en** a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est **continue sur** I si elle est continue en tout réel $a \in I$.

B) Continuité de fonctions usuelles

Propriété 1

- Les fonctions affines et polynômes sont continues sur \mathbf{R} .
- La fonction exponentielle est continue sur \mathbf{R} .
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

Propriété 2

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues sur leur domaine de définition.

Propriété 3

Toute fonction dérivable sur I est continue sur I .

Remarque 1

La réciproque est fautive : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

C) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

Si f est continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème 2 (Corollaire)

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$f(x) = k$ possède une **unique** solution dans $[a; b]$.

D) Fonctions continues et suites convergentes

Propriété 4

Si (u_n) est une suite à valeurs dans I , convergente vers $\ell \in I$, et f est continue sur I , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Théorème 3 (*Théorème du point fixe*)

Soient f continue sur I dans lui-même et (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de $f(x) = x$.