

Chapitre 5

Dérivation et convexité

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de tableaux de variations de f , de f' ou de f'' .
- Lire sur une représentation graphique les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion ; dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Si f'' est positive sur I , alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

A) Compléments sur les dérivées

1) Dérivée d'une fonction composée

Définition 1

Soient u définie sur I à valeurs dans J et v définie sur J . La **composée** $v \circ u$ est définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

Propriété 1

Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J , alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0)).$$

Propriété 2

1. Si u est dérivable sur I , la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable et $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$.
2. Si u est dérivable sur I à valeurs dans $]0; +\infty[$, la fonction $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable et $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Remarque 1

En général $u \circ v \neq v \circ u$. Par exemple avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 1$: $u(v(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ mais $v(u(x)) = x^2 + 1$.

2) Dérivée seconde

Définition 2

Soit f dérivable sur I . Si f' est elle-même dérivable sur I , sa dérivée est notée f'' et appelée **dérivée seconde** de f .

B) Convexité

1) Fonctions convexes et concaves

Définition 3

Soit f définie sur I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Soient A et B deux points de \mathcal{C}_f ; la droite (AB) est appelée **sécante** de \mathcal{C}_f .

Définition 4

1. f est **convexe** sur I si \mathcal{C}_f est en dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection.
2. f est **concave** sur I si \mathcal{C}_f est au-dessus de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection.

Propriété 3

Si f est deux fois dérivable sur I , les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I ;
2. f' est croissante sur I ;
3. $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Propriété 4

Si $f''(x) \geq 0$ sur I , alors \mathcal{C}_f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

2) Point d'inflexion

Définition 5

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente.

Propriété 5

Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.