

# Chapitre 4

## Limites de fonctions

### Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en  $\pm\infty$ , en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

### Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Croissance comparée de  $x \mapsto x^n$  et  $\exp$  en  $+\infty$ .

## A) Limite d'une fonction en l'infini

### Définition 1

Une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand. On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### Définition 2

Une fonction  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  si tout intervalle  $] -\infty; A[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand. On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

### Définition 3

Une fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand. On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ . La droite  $y = \ell$  est une **asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

### Exemple 1

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$  car  $\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . La droite  $y = 2$  est une asymptote horizontale.

## B) Limite d'une fonction en un réel

### Définition 4

Une fonction  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$  si tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$ . On note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

### Définition 5

Une fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment proche de  $a$ . On note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

### Définition 6

La droite  $x = a$  est une **asymptote verticale** à  $\mathcal{C}_f$  si au moins une des limites  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  est infinie.

### Définition 7

- On dit que  $f$  admet une **limite à gauche** de  $a$ , notée  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , lorsque  $f$  admet une limite quand  $x \rightarrow a$  avec  $x < a$ .
- On dit que  $f$  admet une **limite à droite** de  $a$ , notée  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , lorsque  $f$  admet une limite quand  $x \rightarrow a$  avec  $x > a$ .

### Exemple 2

Pour  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  :

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- La droite  $x = 2$  est une asymptote verticale.

## C) Opérations sur les limites

### 1) Limite d'une somme

#### Propriété 1

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\ell_1$	$\ell_1$	$\ell_1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f + g)(x)$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>F.I.</b>

### 2) Limite d'un produit

#### Propriété 2

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f$	$\ell_1$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g$	$\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \times g)$	$\ell_1 \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<b>F.I.</b>

### 3) Limite d'un quotient

#### Propriété 3

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f$	$\ell_1$	$\ell_1$	$\ell_1$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g$	$\ell_2 \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$0^+$	$0^-$	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	<b>F.I.</b>

### Exemple 3

Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 1}$  : on divise numérateur et dénominateur par  $x^2$  (terme de plus haut degré) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 - 0 + 0} = 1.$$

## D) Composition de limites

### Théorème 1

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$ .

### Exemple 4

Soit  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = \sqrt{x}$ .  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  et  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 2$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2} = 2$ .

## E) Théorèmes de comparaison

### Théorème 2 (Théorème de comparaison)

1. Si pour  $x$  suffisamment grand  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .
2. Si pour  $x$  suffisamment grand  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

### Théorème 3 (Théorème d'encadrement)

Si pour  $x$  suffisamment grand  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ .

### Théorème 4 (Croissances comparées)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ .