

# Chapitre 3

## Vecteurs, droites et plans de l'espace

### Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

### A) Vecteurs de l'espace

#### Définition 1

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace. La transformation qui à tout point de l'espace associe l'unique point  $M'$  tel que  $ABM'M$  soit un parallélogramme est la **translation de vecteur**  $\overrightarrow{AB}$ . On note  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ ; on dit que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{MM'}$  sont des **représentants** de  $\vec{u}$ .

#### Théorème 1

Soient un vecteur  $\vec{u}$  et un point  $A$  de l'espace. Il existe un unique point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ ; on dit que  $\overrightarrow{AM}$  est le représentant de  $\vec{u}$  d'origine  $A$ .

### 1) Opérations sur les vecteurs

#### Propriété 1

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points. On a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$  où  $D$  est le point tel que  $ABDC$  est un parallélogramme.

#### Propriété 2

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points. On a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (relation de Chasles).

#### Propriété 3

Soient  $A, B$  des points distincts et  $k \in \mathbf{R}$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$  est défini par :

- Si  $k \geq 0$  alors  $C \in [AB)$  et  $AC = kAB$ .
- Si  $k \leq 0$  alors  $C \in (AB)$  et  $C \notin [AB)$ , avec  $AC = |k|AB$ .

#### Propriété 4

Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs et  $k, k'$  deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0}$  si et seulement si  $k = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ .
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

## B) Droites et plans de l'espace

### Définition 2

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** s'il existe un réel  $k$  non nul tel

### Propriété 5

Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  deux à deux distincts sont **alignés** si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

### Propriété 6

1. Par deux points distincts, il passe une unique droite.
2. Par trois points non alignés  $A$ ,  $B$  et  $C$ , il passe un unique plan  $(ABC)$ .
3. Si deux points distincts  $A$  et  $B$  appartiennent à un plan  $\mathcal{P}$ , alors la droite  $(AB)$  est incluse dans  $\mathcal{P}$ .
4. Dans chaque plan de l'espace, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent.

### Définition 3

Des vecteurs sont **coplanaires** si leurs représentants de même origine  $A$  ont leurs extrémités dans un même plan passant par  $A$ .

### Définition 4

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace.

- La droite  $(AB)$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$  avec  $k \in \mathbf{R}$ .
- $\overrightarrow{AB}$  est un **vecteur directeur** de  $(AB)$ .

### Propriété 7

Une droite  $(d)$  est définie par un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$ ; on la note  $d(A; \vec{u})$ .

### Définition 5

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points de l'espace non alignés.

- Le plan  $(ABC)$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$  avec  $x, y \in \mathbf{R}$ .
- $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont des **vecteurs directeurs** du plan  $(ABC)$ .

### Propriété 8

Un plan  $\mathcal{P}$  est défini par un point  $A$  et deux vecteurs directeurs non colinéaires  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ; on le note  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

## C) Positions relatives de droites et de plans

### 1) Position de deux droites

#### Propriété 9

Deux droites  $(d)$  et  $(d')$  peuvent être coplanaires ou non coplanaires.

$(d)$ et $(d')$ sont coplanaires		$(d)$ et $(d')$ sont non coplanaires
<p><math>(EH)</math> et <math>(FG)</math> parallèles</p>	<p><math>(EG)</math> et <math>(FH)</math> sécantes</p>	<p><math>(EH)</math> et <math>(GC)</math> non coplanaires</p>

## 2) Position d'une droite et d'un plan

### Propriété 10

Soit  $(d)$  une droite et  $\mathcal{P}$  un plan. Il existe trois positions relatives :

$(d)$ strictement parallèle à $\mathcal{P}$	$(d)$ incluse dans $\mathcal{P}$	$(d)$ sécante à $\mathcal{P}$
<p><math>(EH) \parallel \mathcal{P}</math></p>	<p><math>(AC)</math> incluse dans <math>\mathcal{P}</math></p>	<p><math>(d)</math> sécante à <math>\mathcal{P}</math></p>

## 3) Position de deux plans

### Propriété 11

Soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  deux plans. Il existe trois configurations possibles :

Plans parallèles	Plans sécants	Plans confondus

### Théorème 2

Si deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  contiennent respectivement deux droites  $(d)$  et  $(d')$  parallèles entre elles, alors leur intersection  $(d'')$  est parallèle à  $(d)$  et  $(d')$ .

*Démonstration.* Soit  $\vec{v}$  un vecteur directeur commun à  $(d)$  et  $(d')$  (car elles sont parallèles). Soit  $\vec{w}$  un vecteur directeur de  $(d'') = (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')$ . Comme  $(d'')$  est contenue dans  $\mathcal{P}$ , le vecteur  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{v}$  et d'un vecteur directeur de  $(d)$ . De même,  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire dans  $\mathcal{P}'$ . Si  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  n'étaient pas colinéaires,  $(\vec{v}, \vec{w})$  formerait une base commune à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ , ce qui impliquerait  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ , contredisant le fait qu'ils soient sécants. Donc  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, et  $(d'')$  est parallèle à  $(d)$  et  $(d')$ .  $\square$

### Théorème 3

Si deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles, alors tout plan  $\Pi$  qui coupe  $\mathcal{P}$  coupe aussi  $\mathcal{P}'$ , et les intersections sont deux droites parallèles.

## D) Repère de l'espace

### 1) Base de l'espace

#### Définition 6

Trois vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  forment une **base de l'espace** si et seulement si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des deux autres.

#### Propriété 12

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de l'espace. Tout vecteur  $\vec{u}$  s'écrit de façon unique  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ;  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  sont les coordonnées de  $\vec{u}$  dans cette base.

### 2) Repère de l'espace

#### Propriété 13

Un **repère de l'espace** est un quadruplet  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O$  est l'origine et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de l'espace.

### Propriété 14

Pour tout point  $M$  de l'espace, il existe un unique triplet  $(x_M; y_M; z_M)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$ ; ce triplet est appelé les **coordonnées** de  $M$ .

### 3) Coordonnées d'un vecteur

#### Propriété 15

Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ .

#### Propriété 16

$\vec{u} = \vec{v} \iff$  leurs coordonnées sont égales composante par composante.

#### Propriété 17

Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ , les coordonnées du milieu  $I$  de  $[AB]$  sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

### Opérations sur les coordonnées de vecteurs

#### Propriété 18

Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

$$1. \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$$

$$2. \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \\ \lambda z_u \end{pmatrix}$$

### 4) Représentation paramétrique d'une droite

#### Propriété 19

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , la droite passant par  $A(x_A; y_A; z_A)$  de vecteur directeur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$