

# Chapitre 2

## Limites de suite

### Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

### Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .
- Limite de  $(q^n)$ , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers  $+\infty$  d'une suite minorée par une suite divergeant vers  $+\infty$ .

### Exemples d'algorithme — Programme officiel (BO)

- Recherche de valeurs approchées de  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $\ln 2$ , etc.

## A) Limite

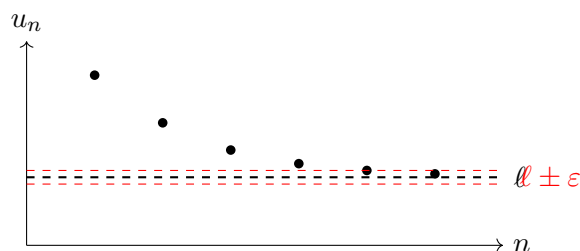
### 1) Limite finie

#### Définition 1

Une suite  $(u_n)$  converge vers le réel  $\ell$  si tout intervalle contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . On dit que la suite  $(u_n)$  est **convergente** et converge vers  $\ell$ .

#### Remarque 1

Une suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'intervalle  $] \ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon [$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

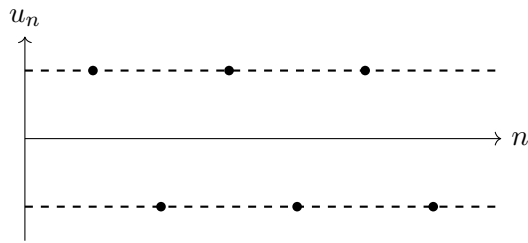


#### Définition 2

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

#### Exemple 1

$u_n = (-1)^n$  est une suite divergente ; elle n'admet pas de limite lorsque  $n$  tend vers l'infini.



### Propriété 1 (*Unicité de la limite*)

Si une suite  $(u_n)$  a une limite réelle, alors cette limite est unique.

*Démonstration.* Supposons que  $(u_n)$  ait deux limites  $l_1$  et  $l_2$  avec  $l_1 \neq l_2$ . Posons  $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3} > 0$ . Par définition de la limite, il existe  $N_1$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ ,  $|u_n - l_1| < \varepsilon$ , et il existe  $N_2$  tel que pour tout  $n \geq N_2$ ,  $|u_n - l_2| < \varepsilon$ . Donc, pour  $n \geq \max(N_1, N_2)$  :

$$|l_1 - l_2| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|l_1 - l_2|.$$

Ceci est impossible si  $l_1 \neq l_2$ , donc  $l_1 = l_2$ . □

## 2) Quelques limites finies classiques

### Propriété 2

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
2. Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
3. Pour tout  $-1 < q < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

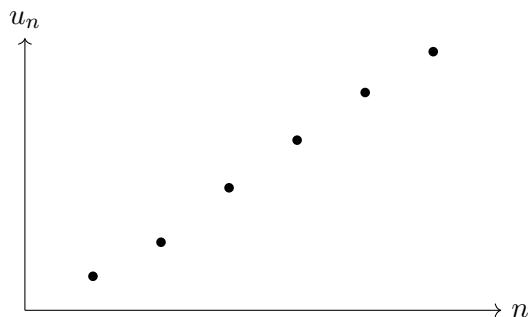
### Théorème 1

- Une suite croissante et majorée est convergente.
- Une suite décroissante et minorée est convergente.

## 3) Limite infinie

### Définition 3

Une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  si, pour tout réel  $A > 0$ , l'intervalle  $[A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .



### Définition 4

Une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$  si, pour tout réel  $B < 0$ , l'intervalle  $] -\infty; B]$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

## B) Opérations sur les limites

### Définition 5

Une **forme indéterminée** est une opération rencontrée lors du calcul d'une limite pour laquelle on ne peut pas conclure directement.

### 1) Somme

#### Propriété 3

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$
$l_1$	$l_2$	$l_1 + l_2$
$l_1$	$+\infty$	$+\infty$
$l_1$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	<b>F.I.</b>

### 2) Produit

#### Propriété 4

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \times v_n)$
$l_1$	$l_2$	$l_1 \times l_2$
$l_1 > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l_1 > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l_1 < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l_1 < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	<b>F.I.</b>

### 3) Quotient

#### Propriété 5

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$l_1$	$l_2 \neq 0$	$\frac{l_1}{l_2}$
$l_1$	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	<b>F.I.</b>
0	0	<b>F.I.</b>
$l_1 > 0$ ou $+\infty$	0 avec $v_n > 0$	$+\infty$
$l_1 < 0$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	$-\infty$
$l_1 > 0$ ou $+\infty$	0 avec $v_n < 0$	$-\infty$
$l_1 < 0$ ou $-\infty$	0 avec $v_n < 0$	$+\infty$

### Exemple 2

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 3n - 5 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{n^3}\right) \left(\frac{1}{n} + 5\right) = 15$

#### 4) Comment lever une indétermination ?

On peut effectuer une ou plusieurs factorisations.

#### Exemple 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 2n^2 + 5 = +\infty \text{ (après factorisation par } n^3 \text{)}.$$

### C) Limites et comparaison

#### Propriété 6

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang,  $v_n \leq u_n$  et  $\lim v_n = +\infty$ , alors  $\lim u_n = +\infty$ .

#### Propriété 7

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  et  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $\lim u_n = -\infty$ .

#### Théorème 2 (Théorème des gendarmes)

Si  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont trois suites telles que, à partir d'un certain rang,  $v_n \leq u_n \leq w_n$  et  $\lim v_n = \lim w_n = \ell \in \mathbf{R}$ , alors  $\lim u_n = \ell$ .

### D) Suites de référence

#### Propriété 8

Pour toute suite arithmétique  $(u_n)$  de raison  $r$  :

- Si  $r > 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $r < 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

#### Propriété 9

Pour toute suite géométrique  $(u_n)$  de raison  $q$  :

- Si  $q > 1$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $q < -1$  alors  $(u_n)$  diverge et n'a pas de limite.
- Si  $-1 < q < 1$  alors  $(u_n)$  converge vers 0.

### E) Utilisation de la calculatrice

#### NumWorks

Menu **Suites** : entrer la suite en explicite ou récurrente, puis observer dans **Tableau** ou **Graphique**.

#### TI

Mettre le mode **Suites**, définir  $u(n)$ , utiliser **TABLE** et **GRAPH**.

#### Casio

Menu **RECUR**, entrer  $u_n$ , visualiser le tableau et le graphe.

**Remarque** : Ces outils servent à *conjecturer* une limite, mais pas à la prouver rigoureusement.

### F) Algorithme de seuil d'une suite

#### Définition 6

On appelle **seuil** d'une suite  $(u_n)$  par rapport à un réel  $\ell$  et une précision  $\varepsilon > 0$  le plus petit entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .

## Pseudo-code

```
Entrer epsilon
Entrer la limite supposée l
n <- 0
Tant que  $|u(n) - l| \geq \text{epsilon}$ 
    n <- n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

## Python (NumWorks ou PC)

```
def seuil(epsilon, l):
    n = 1
    u = 1/n # exemple avec u_n = 1/n
    while abs(u - l) >= epsilon:
        n += 1
        u = 1/n
    return n

print(seuil(0.001, 0)) # renvoie 1000
```