Chapitre 1

Récurrence, Suites

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Inégalité de Bernoulli : $(1+a)^n \geq 1+na$ pour $a>0$, par récurrence (utilisée pour démontrer la limite de (q^n)).

Exemples dálgorithme — Programme officiel (BO)

- Recherche de seuils.

A) Récurrence

Définition 1

Une propriété mathématique est une phrase qui peut être vraie ou fausse.

Théorème 1

Soient n_0 un entier et $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n définie pour $n \geq n_0$.
On suppose :

1. ***Initialisation :*** *$P(n_0)$ est vraie.*
2. ***Hérédité :*** *Pour tout entier naturel $k \geq n_0$ fixé, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.*

Alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 1

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.
Notons $P(n)$:$\ll u_n = 2 \times 3^n + 1 \gg$.

1. ***Initialisation :*** *Pour $n=0$ on a $2 \times 3^0 + 1 = 3$, donc $P(0)$ est vraie.*
2. ***Hérédité :*** *Supposons la propriété vraie pour un $k \geq 0$ (i.e. $u_k = 2 \times 3^k + 1$). On veut montrer que $P(k+1)$ ($u_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} + 1$) est vraie.*

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k - 2 \\ &= 3 \times (2 \times 3^k + 1) - 2 \\ &= 2 \times 3 \times 3^k + 3 - 2 \\ &= 2 \times 3^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

   Donc $P(k+1)$ est vraie.

3. ***Conclusion :*** *Comme $P(0)$ est vraie et que pour tout entier k, $P(k)$ vraie implique $P(k+1)$ vraie, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Exemple 2

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. ***Initialisation :*** *Pour $n = 1$:*
$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$
La propriété est vraie pour $n = 1$.
2. ***Hérédité :*** *Supposons la propriété vraie pour un entier $k \geq 1$, c'est-à-dire :*
$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$
Montrons qu'elle est vraie pour $k + 1$:
$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$
La propriété est vraie pour $k + 1$.
3. ***Conclusion :*** *La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire, donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.*

Exemple 3 (*Contre-exemple — importance de l'initialisation*)

Montrons que la proposition « pour tout entier naturel $n \geq 1$, $2^n \geq n^2$ » est **fausse** *en exhibant un contre-exemple.*

— *Pour $n = 1$: $2^1 = 2 \geq 1 = 1^2$. Vraie.*
— *Pour $n = 2$: $2^2 = 4 = 2^2$. Vraie.*
— *Pour $n = 3$: $2^3 = 8 < 9 = 3^2$.* ***Fausse.***

La propriété est donc fausse dès $n = 3$.

Remarque pédagogique : *même si l'hérédité est vérifiable pour $k \geq 3$, l'échec de l'initialisation en $n = 3$ suffit à invalider la proposition. Cet exemple illustre l'importance de vérifier rigoureusement l'initialisation.*

B) Monotonie d'une suite

Définition 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

— *La suite (u_n) est* ***croissante*** *si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.*
— *La suite (u_n) est* ***décroissante*** *si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.*
— *La suite (u_n) est* ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante.*

1) Comment montrer qu'une suite est monotone ?

Méthode 1 — Signe de $u_{n+1} - u_n$

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

— $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \Rightarrow$ suite croissante.
— $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \Rightarrow$ suite décroissante.
— $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \Rightarrow$ suite strictement croissante.
— $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \Rightarrow$ suite strictement décroissante.

Méthode 2 — Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (termes strictement positifs)

Si (u_n) est strictement positive :

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \Rightarrow$ suite croissante.
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \Rightarrow$ suite décroissante.
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \Rightarrow$ suite strictement croissante.
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \Rightarrow$ suite strictement décroissante.

Méthode 3 — Sens de variation d'une fonction

S'il existe une fonction f telle que $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$ via la dérivée f'.
- $f'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[\Rightarrow (u_n)$ croissante.
- $f'(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[\Rightarrow (u_n)$ décroissante.
- $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[\Rightarrow (u_n)$ strictement croissante.
- $f'(x) < 0$ sur $[0; +\infty[\Rightarrow (u_n)$ strictement décroissante.

Méthode 4 — Récurrence sur $P(n)$: $u_n \leq u_{n+1}$

- **Initialisation :** vérifier $u_0 \leq u_1$ (ou $u_1 \leq u_2$).
- **Hérédité :** supposer $u_k \leq u_{k+1}$ et montrer $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.
- Si les deux étapes sont vérifiées, la suite est croissante. Si on montre $u_n \geq u_{n+1}$ par récurrence, elle est décroissante.

Définition 3

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
- *On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq M$.*
- *On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq m$.*
- *On dit que (u_n) est **bornée** si elle est minorée et majorée.*